

## RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA E FREDHOLM

Gustavo Jorge Pereira, Dr. Luís Antônio Fernandes de Oliveira – Matemática – Departamento de Matemática – Faculdade de Engenharia - Campos Ilha Solteira.

Neste trabalho apresentaremos uma demonstração de convergência da série Neumann, resultado essencial no nosso projeto de iniciação científica sobre resolução de equações integrais via quadratura numérica, sob a hipótese  $\| \lambda K \| < 1$ , e  $\lambda$  um número real, sendo  $K(s,t)$ ,  $x, y \in L^2$   $K(s,t), x, y \in L^2([a,b], R)$ , ambiente onde consideramos núcleos, dados e soluções da equação integral de Fredholm

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)dt \quad (1)$$

Consideremos a equação (1) na forma  $Lx = (I - \lambda K)x = y$ . Se para um determinado  $\lambda = \lambda_0$ , existir um operador  $L^{-1} \in L^2$  satisfazendo  $L^{-1}L = LL^{-1} = I$ , dizemos que  $\lambda_0$  é um valor regular do operador K. Se  $\lambda$  é um valor regular de K, a equação

$$x = y + \lambda Kx \quad (2)$$

tem solução única.

$$x = (I - \lambda K)^{-1} y = L^{-1} y \quad (3)$$

Dado algum  $\lambda$ , podemos mostrar que é um valor regular se construirmos explicitamente um operador inverso  $L^{-1} = I - \lambda K$  ou uma solução única. Desde que  $\lambda=0$  é sempre um valor regular  $\lambda$ , e é natural procurarmos um representante para  $L^{-1}$  na forma de série, dependendo do valor  $\lambda$ , devemos ter que

$$L^{-1} = (I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \lambda^3 K^3 + \dots + \lambda^n K^n + \dots = I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K^n \quad (4)$$

Alternativamente podemos tentar encontrar um representante para x resolvendo (2) por aproximações sucessivas. Para  $\lambda=0$  a solução é  $x=y$ . Para tanto, definimos a sequência de aproximações  $x_n$  de x da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_1 = y + \lambda K x_0 = y + \lambda K y \\ x_2 = y + \lambda K x_1 = y + \lambda K y + \lambda^2 K^2 x y \\ \vdots \\ x_{n+1} = y + \lambda K x_n = y + \lambda K y + \lambda^2 K^2 y + \lambda^3 K^3 y + \dots + \lambda^{n+1} K^{n+1} y \end{cases}$$

Logo,

$$x_n = y + \sum_{i=1}^n \lambda^i K^i y \quad (4b)$$

A equação (4b) é significativa para  $\lambda$ ,  $K$  arbitrários e algum  $n$  finito. Definimos uma seqüência de função  $x_n$  e esta seqüência pode ter ou não um limite quando  $n \rightarrow \infty$ . De qualquer forma, temos representação para  $x$ .

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K^i y \quad (4c)$$

A equação é a série de Neumann para a solução de  $x$  em (1). A mesma série é obtida se aplicarmos a série (3) para o operador  $L^{-1}$  em (2), e (3) é chamada de série de Neumann do operador inverso  $L^{-1}$ . Se para mesmos  $\lambda$  fixo e para todo  $y$  a serie (4c) converge para a solução (1), ou é equivalente a série (3) e é convergente para um operador satisfazendo a relação  $LL^{-1} = L^{-1}L = I$ , então  $\lambda$  é um valor regular de  $K$ . Por exemplo, dada equação integral  $x(s) = s + \int_0^s e^{s-t} x(t) dt$ , podemos mostrar que  $L^{-1}y(s) = e^s (2 - s + \frac{s^2}{2}) - 2$ .

**Teorema:** Se  $\|\lambda K\| < 1$ , então a série de Neumann converge para  $L^{-1}$ .

**Prova:** Definimos,

$$H_n = \sum_{j=0}^n \lambda^j K^j$$

Para  $n > m$ , temos

$$H_n - H_m = \sum_{j=m+1}^n \lambda^j K^j$$

e, desse modo,

$$\|H_n - H_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^n \lambda^j K^j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^n \lambda^j \|K^j\| = \frac{\|\lambda K\|^{m+1} + \|\lambda K\|^{m+2} + \dots + \|\lambda K\|^n (1 - \|\lambda K\|)}{(1 - \|\lambda K\|)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|\lambda K\|^{m+1} + \|\lambda K\|^{m+2} + \Lambda + \|\lambda K\|^n - \|\lambda K\|^{m+2} - \|\lambda K\|^{m+3} - \Lambda - \|\lambda K\|^{n+1}}{(1 - \|\lambda K\|)} = \\
&= \frac{\|\lambda K\|^{m+1} - \|\lambda K\|^{n+1}}{1 - \|\lambda K\|} = \frac{\|\lambda K\| (\|\lambda K\|^m - \|\lambda K\|^n)}{1 - \|\lambda K\|}
\end{aligned}$$

Como por hipótese  $\|\lambda K\| < 1$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda K\|^n = 0$ , e portanto,  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|H_n - H_m\| = 0$ , isto é, a sequência é de Cauchy. Logo, como  $L^2$  é um espaço de Banach,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \lambda^j K^j = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j K^j = L^{-1}$$

Como queremos mostrar que  $I - (I - \lambda K)L^{-1} = 0$ , tomamos,  $R_n = I - (I - \lambda K)H_n$ , e assim

$$R_n = I - \sum_{j=0}^n \lambda^j K^j + \sum_{j=1}^{m+1} \lambda^j K^j = \lambda^{n+1} K^{n+1}. \text{ Logo, } \|R_n\| = \|\lambda K\|^{n+1} \text{ e finalmente,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \lambda K)H_n = (I - \lambda K) \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = I \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = (I - \lambda K)^{-1}$$

### Referências Bibliográficas

- [1] DELVES, L.M./MOHAMED, J.L., Computational Methods for Integral Equations, Cambridge University Press, 1984.
- [2] TRICOMI, F.G. , Integral Equations, Dover Publications Inc., Londres, 1985.
- [3] PETROVSKI, I. Teoria de las Ecuaciones Integrales, Editorial Mir, Moscu, 1976.
- [4] KRESS, R. , Linear Integral Equations, Springer-Verlag, 1999.

**Bolsa:** Fapesp